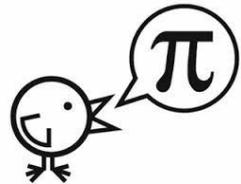


# INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

## 1.2 Determinantes

**LIBRO**  
**LAS MATRICES SON FÁCILES**  
**José Manuel Casteleiro**



# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

## 1.2 Determinantes

### 1. DEFINICIÓN DE DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

Columnas

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Filas

Términos

$a_{ij}$

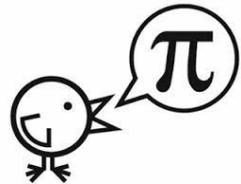
Orden  
(n)

Indicativo de  
fila

Indicativo de  
columna

Número de  
Filas n

Número de  
Columnas n



# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

## 1.2 Determinantes

### 2. MENOR Y MENOR COMPLEMENTARIO DE UNA MATRIZ

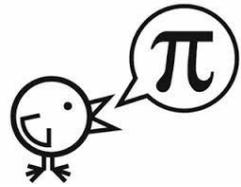
**MENOR**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

**MENOR COMPLEMENTARIO**

$$M = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{52} & a_{54} \end{vmatrix}$$
$$M_C = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{15} \\ a_{31} & a_{33} & a_{35} \\ a_{41} & a_{43} & a_{45} \end{vmatrix}$$

The diagram illustrates the extraction of a 2x2 minor and its complementary 3x3 minor from a 5x5 matrix A. The minor M is formed by the elements in the second and fifth rows and the second and fourth columns of A. The complementary minor M\_C is formed by the elements in the first, third, and fourth rows and the first, third, and fifth columns of A. Red dashed lines and circles highlight the elements involved in the extraction process.



# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

## 1.2 Determinantes

### 3. MENOR Y MENOR COMPLEMENTARIO DE UN TÉRMINO

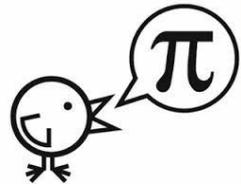
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

**MENOR**

$$M = |a_{32}|$$

**MENOR  
COMPLEMENTARIO**

$$M_C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$



# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

## 1.2 Determinantes

### 4. ADJUNTO O COFACTOR DE UN TÉRMINO

$$Adj_{ij} = (-1)^{i+j} M_c$$

MENOR COMPLEMENTARIO

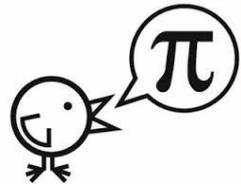
Ejemplo 2.3. Hallar el adjunto  $a_{32}$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

#### SIGNOS DE LOS ADJUNTOS

$$|A| = \begin{vmatrix} +a_{11} & -a_{12} & +a_{13} & -a_{14} & +a_{15} \\ -a_{21} & +a_{22} & -a_{23} & +a_{24} & a_{25} \\ +a_{31} & -a_{32} & +a_{33} & -a_{34} & +a_{35} \\ -a_{41} & +a_{42} & -a_{43} & +a_{44} & -a_{45} \\ +a_{51} & -a_{52} & +a_{53} & -a_{54} & +a_{55} \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$



# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

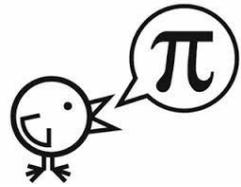
## 1.2 Determinantes

### EJERCICIOS EN CLASE

Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

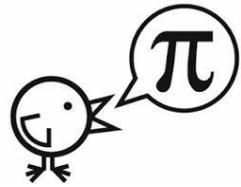
1. Hallar el adjunto del término situado en la intersección de la 2ª fila y 1ª columna
2. Hallar el adjunto del término situado en la intersección de la 1ª fila y 3ª columna
3. Hallar el adjunto del término situado en la intersección de la 3ª fila y 2ª columna



# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

## 1.2 Determinantes

# 5. CÁLCULO DE DETERMINANTES



# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

## 1.2 Determinantes

### 5.1 CÁLCULO DE DETERMINANTES DE ORDEN 2

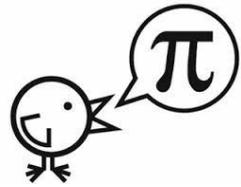
$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \longrightarrow |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ejemplo 2.4

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$



$$|A| = (2)(2) - (-3)(1) = 7$$



# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

## 1.2 Determinantes

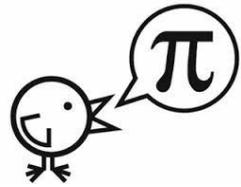
### 5.2 CÁLCULO DE DETERMINANTES DE ORDEN 3

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|A| = \underbrace{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31}}_{\text{TÉRMINOS POSITIVOS}} - \underbrace{[a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11}]}_{\text{TÉRMINOS NEGATIVOS}}$$

TÉRMINOS POSITIVOS

TÉRMINOS NEGATIVOS

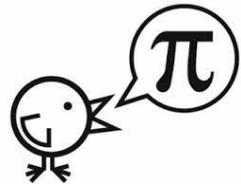


# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

## 1.2 Determinantes

### CÁLCULO DE DETERMINANTES DE ORDEN 3

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (9 + 8 + 1) - [6 + 2 + 6] = (18) - (14) = 4$$



# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

## 1.2 Determinantes

### EJERCICIOS EN CLASE

$$1. |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$$

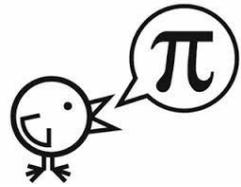
$$2. |A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$$

$$3. |A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

$$4. |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$5. |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$6. |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$



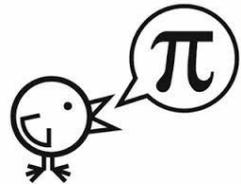
# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

## 1.2 Determinantes

### 6. PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

#### 1ª PROPIEDAD

$$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \left| \begin{array}{ccc} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{array} \right| = - \left| \begin{array}{ccc} a & d & g \\ c & f & i \\ b & e & h \end{array} \right| \end{array} \quad \text{CAMBIA EL SIGNO}$$



# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

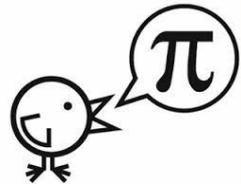
## 1.2 Determinantes

### PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Ejemplo 2.6 Cambiar de lugar las filas 1ª y 2ª en el siguiente determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -10$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 10$$



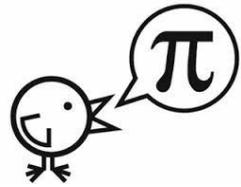
# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

## 1.2 Determinantes

### PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

## 2ª PROPIEDAD

$$(k) \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ kb & ke & kh \\ c & f & i \end{vmatrix}$$



# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

## 1.2 Determinantes

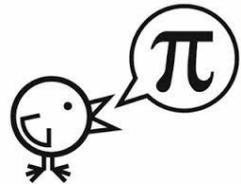
### PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

#### Ejemplo 2.8

Multiplicar la primera fila por (2) en el siguiente determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -10$$

$$|A| = (2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -20$$



# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

## 1.2 Determinantes

### PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

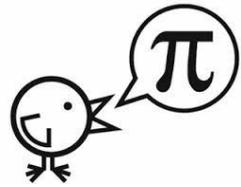
#### NOTA2.2

**Ejemplo 2.9 Sacar los factores comunes que se puedan en el siguiente determinante:**

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 24 & 27 \end{vmatrix} = -12$$

(2)  
↑

$$|A| = \begin{matrix} (2) \leftarrow \\ (3) \leftarrow \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 24 & 27 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 12 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{vmatrix} = (12)(-1) = -12$$



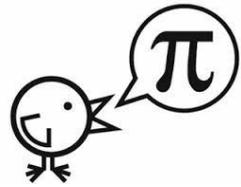
# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

## 1.2 Determinantes

### PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

### 3ª PROPIEDAD

$$\begin{matrix} (k) \\ \downarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{d} & \mathbf{g} \\ \mathbf{b} & \mathbf{e} & \mathbf{h} \\ \mathbf{c} & \mathbf{f} & \mathbf{i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{d} & \mathbf{g} \\ \mathbf{ka} + \mathbf{b} & \mathbf{kd} + \mathbf{e} & \mathbf{kg} + \mathbf{h} \\ \mathbf{c} & \mathbf{f} & \mathbf{i} \end{vmatrix}$$



# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

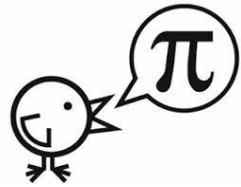
## 1.2 Determinantes

### PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

**Ejemplo 2.10** Comprobar que haciendo el mayor número posible de ceros en la primera columna, el siguiente determinante no varía:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -10$$

$$|A| = \begin{matrix} (3)(-2) \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \downarrow \quad \downarrow \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -10$$



# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

## 1.2 Determinantes

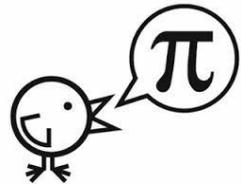
### PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

#### 4ª PROPIEDAD

$$|A| = |A^t|$$

**Ejemplo 2.11** Comprobar que el determinante de la matriz A del ejemplo anterior no varía:

$$|A^t| = \left| \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & -3 \end{bmatrix}^t \right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -10$$



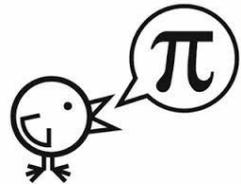
# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

## 1.2 Determinantes

### PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

#### 5ª PROPIEDAD

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{d} & \mathbf{g} \\ \mathbf{0} & \mathbf{e} & \mathbf{h} \\ \mathbf{0} & \mathbf{f} & \mathbf{i} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$



# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

## 1.2 Determinantes

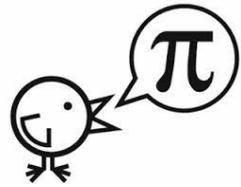
### PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

#### 6ª PROPIEDAD

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{d} & \mathbf{d} & \mathbf{g} \\ \mathbf{e} & \mathbf{e} & \mathbf{h} \\ \mathbf{f} & \mathbf{f} & \mathbf{i} \end{vmatrix} = 0$$

**Ejemplo 2.12** Comprobar que el valor del siguiente determinante es nulo :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \end{vmatrix} = [(-3) + (-9) + (-3)] - [(-9) + (-3) + (-3)] = (-18) + (18) = 0$$



# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

## 1.2 Determinantes

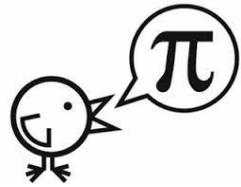
### PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

#### 7ª PROPIEDAD

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{kd} & \mathbf{d} & \mathbf{g} \\ \mathbf{ke} & \mathbf{e} & \mathbf{h} \\ \mathbf{kf} & \mathbf{f} & \mathbf{i} \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo 2.13 Hallar el valor del siguiente determinante:

$$\begin{matrix} (3) \\ \uparrow \\ |A| = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 \end{matrix}$$



# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

## 1.2 Determinantes

### PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

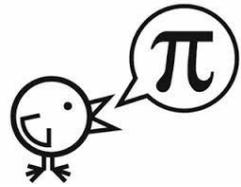
#### 8ª PROPIEDAD

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{a+d} & \mathbf{l} & \mathbf{d} \\ \mathbf{b+e} & \mathbf{m} & \mathbf{e} \\ \mathbf{c+f} & \mathbf{n} & \mathbf{f} \end{vmatrix} |A| = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{l} & \mathbf{d} \\ \mathbf{b} & \mathbf{m} & \mathbf{e} \\ \mathbf{c} & \mathbf{n} & \mathbf{f} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{d} & \mathbf{l} & \mathbf{d} \\ \mathbf{e} & \mathbf{m} & \mathbf{e} \\ \mathbf{f} & \mathbf{n} & \mathbf{f} \end{vmatrix}$$

Ejemplo 2.14 Comprobar la propiedad anterior con el siguiente determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 24 & 27 \end{vmatrix} = -12$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{1+1} & 8 & 10 \\ \mathbf{2+1} & 2 & 4 \\ 0 & 24 & 27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 8 & 10 \\ \mathbf{2} & 2 & 4 \\ 0 & 24 & 27 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 8 & 10 \\ \mathbf{1} & 2 & 4 \\ 0 & 24 & 27 \end{vmatrix} = 6 - 18 = -12$$



# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

## 1.2 Determinantes

### PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

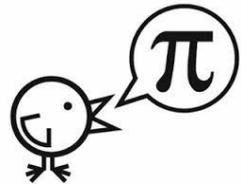
#### 9ª PROPIEDAD

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{a+d} & \mathbf{a} & \mathbf{d} \\ \mathbf{b+e} & \mathbf{b} & \mathbf{e} \\ \mathbf{c+f} & \mathbf{c} & \mathbf{f} \end{vmatrix} = 0$$

**Ejemplo 2.15** Demostrar que el siguiente determinante es nulo:

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{1+d} & \mathbf{1} & \mathbf{d} \\ \mathbf{2+e} & \mathbf{2} & \mathbf{e} \\ \mathbf{3+f} & \mathbf{3} & \mathbf{f} \end{vmatrix} = 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{1+d} & \mathbf{1} & \mathbf{d} \\ \mathbf{2+e} & \mathbf{2} & \mathbf{e} \\ \mathbf{3+f} & \mathbf{3} & \mathbf{f} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{d} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{e} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \mathbf{f} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{d} & \mathbf{1} & \mathbf{d} \\ \mathbf{e} & \mathbf{2} & \mathbf{e} \\ \mathbf{f} & \mathbf{3} & \mathbf{f} \end{vmatrix} = 0$$



# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

## 1.2 Determinantes

### PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

#### 10ª PROPIEDAD

$$|[A][B]| = |A||B|$$

**Ejemplo 2.16** Comprobar la propiedad anterior con las siguientes matrices:

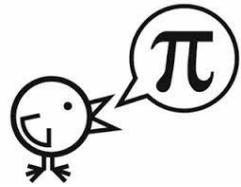
$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 24 & 27 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 24 & 27 \end{vmatrix} = -12 \quad [B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -2$$

$$|A||B| = (-12)(-2) = 24$$

$$|[A][B]| = \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 24 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix} \\ 40 & 16 & -28 \\ 17 & 12 & -19 \\ 105 & 30 & -57 \end{vmatrix} = 24$$

**NOTA**

$$|A + B| \neq |A| + |B|$$



# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

## 1.2 Determinantes

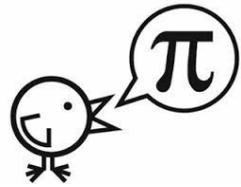
### PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

#### NOTA2.6

**Ejemplo 2.18 Sacar del siguiente determinante todos los Factores comunes por filas:**

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 10 & 2 \\ 8 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 72$$

$$|A| = \begin{matrix} (2) & \leftarrow \\ (2) & \leftarrow \\ (2) & \leftarrow \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 10 & 2 \\ 8 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 2^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2^3 (9) = 72$$



# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

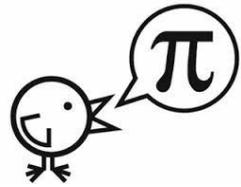
## 1.2 Determinantes

### 7. DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR LOS ELEMENTOS DE UNA FILA O COLUMNA

Ejemplo: Desarrollar el determinante por los elementos de la primera columna.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 Adj(a_1) - a_2 Adj(a_2) + a_3 Adj(a_3) - a_4 Adj(a_4)$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$



# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

## 1.2 Determinantes

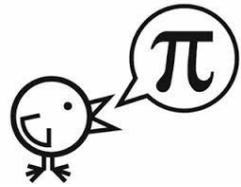
### DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR LOS ELEMENTOS DE UNA FILA O COLUMNA

Ejemplo 2.20 Calcular el siguiente determinante desarrollándolo por los elementos de su **tercera columna**:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (1) \begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} - (0) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} + (2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} - (1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -12 + 2(13) - 25 = -11$$



# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

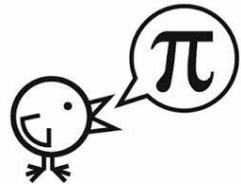
## 1.2 Determinantes

### DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR LOS ELEMENTOS DE UNA FILA O COLUMNA

Ejemplo 2.21 Calcular el siguiente determinante desarrollándolo por los elementos de su **segunda fila**:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$|A| = - (3) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (0) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = - (3) (-3) - (2) (3) = 3$$



# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

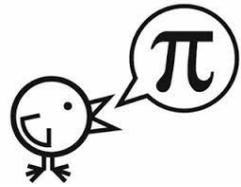
## 1.2 Determinantes

### DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR LOS ELEMENTOS DE UNA FILA O COLUMNA

Calcular el siguiente determinante desarrollándolo por los elementos de su **tercera columna**:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$|A| = (1) \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (1)(9) - (2)(3) = 3$$



# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

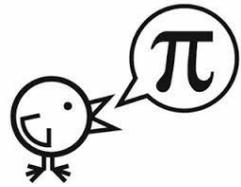
## 1.2 Determinantes

### DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR LOS ELEMENTOS DE UNA FILA O COLUMNA

Calcular el siguiente determinante desarrollándolo por los elementos de su **segunda columna**:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$|A| = - (0) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (0) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (3) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = - (3) (-1) = 3$$



# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

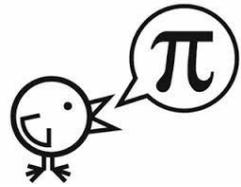
## 1.2 Determinantes

### 8. MÉTODO GENERAL PARA LA RESOLUCIÓN DE DETERMINANTES

Ejemplo 2.22 Calcular el siguiente determinante por el método general.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{matrix} (-1)(-2) \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (+1) \begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

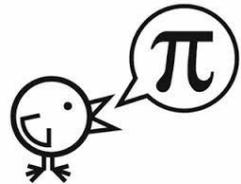


# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

## 1.2 Determinantes

### MÉTODO GENERAL PARA LA RESOLUCIÓN DE DETERMINANTES

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ (-2) \end{matrix} = \begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -11$$



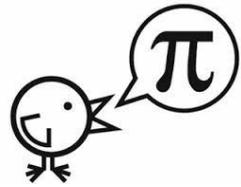
# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

## 1.2 Determinantes

### MÉTODO GENERAL PARA LA RESOLUCIÓN DE DETERMINANTES

**Ejemplo 2.22** Calcular el siguiente determinante por los elementos de la primera fila.

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & -11 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = (+) \begin{vmatrix} 3 & -3 & -11 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 8 \end{vmatrix} \\
 |A| &= (-3)(3) = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -11 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 0 & -8 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = -11
 \end{aligned}$$



# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

## 1.2 Determinantes

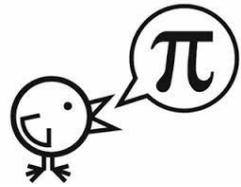
### EJERCICIOS EN CLASE

Calcular los siguientes determinantes:

$$1. \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$2. \quad |A| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$4. \quad |A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$



# Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

## 1.2 Determinantes

### EJERCICIOS EN CASA

**Página 125.**

**Del 1 y 2**

**Página 144**

**Del 1, 2, 3, 4**