INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.2 Determinantes

LIBRO
LAS MATRICES SON FÁCILES
José Manuel Casteleiro

Prof. Ramón Arilla
Departamento de Investigación de Mercados
y Métodos Cuantitativos

Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.2 Determinantes

1. DEFINICIÓN DE DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

$$\det A = |A| = \overbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & .. & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & .. & a_{3n} \\ : & : & : & .. & : \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & .. & a_{nn} \end{vmatrix}}^{\text{Columnas}} \left.\vphantom{\begin{vmatrix} a \\ a \\ a \\ : \\ a \end{vmatrix}}\right\} \text{Filas}$$

Términos

$$a_{ij}$$

Indicativo de fila

Indicativo de columna

Orden

(n)

Número de Filas n

Número de Columnas n

Prof. Ramón Arilla
Departamento de Investigación de Mercados
y Métodos Cuantitativos

PÁGINAS 93 Y 94

2. MENOR Y MENOR COMPLEMENTARIO DE UNA MATRIZ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

MENOR

$$M = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{52} & a_{54} \end{vmatrix}$$

MENOR COMPLEMENTARIO

$$M_C = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{15} \\ a_{31} & a_{33} & a_{35} \\ a_{41} & a_{43} & a_{45} \end{vmatrix}$$

Prof. Ramón Arilla
Departamento de Investigación de Mercados
y Métodos Cuantitativos

PÁGINAS 94 Y 95

3. MENOR Y MENOR COMPLEMENTARIO DE UN TÉRMINO

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

MENOR

$$M = |a_{32}|$$

MENOR COMPLEMENTARIO

$$M_C = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

Prof. Ramón Arilla
Departamento de Investigación de Mercados
y Métodos Cuantitativos

4. ADJUNTO O COFACTOR DE UN TÉRMINO

$$Adj_{ij} = (-1)^{i+j}\, M_C$$

MENOR COMPLEMENTARIO

Ejemplo 2.3. Hallar el adjunto a_{32}

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

SIGNOS DE LOS ADJUNTOS

$$|A| = \begin{vmatrix} +a_{11} & -a_{12} & +a_{13} & -a_{14} & +a_{15} \\ -a_{21} & +a_{22} & -a_{23} & +a_{24} & a_{25} \\ +a_{31} & -a_{32} & +a_{33} & -a_{34} & +a_{35} \\ -a_{41} & +a_{42} & -a_{43} & +a_{44} & -a_{45} \\ +a_{51} & -a_{52} & +a_{53} & -a_{54} & +a_{55} \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}$$

EJERCICIOS EN CLASE

Dada la siguiente matriz:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Hallar el adjunto del término situado en la intersección de la 2ª fila y 1ª columna
2. Hallar el adjunto del término situado en la intersección de la 1ª fila y 3ª columna
3. Hallar el adjunto del término situado en la intersección de la 3ª fila y 2ª columna

5. CÁLCULO DE DETERMINANTES

5.1 CÁLCULO DE DETERMINANTES DE ORDEN 2

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \longrightarrow |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ejemplo 2.4

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (2)(2) - (-3)(1) = 7$$

Prof. Ramón Arilla
Departamento de Investigación de Mercados
y Métodos Cuantitativos

Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.2 Determinantes

5.2 CÁLCULO DE DETERMINANTES DE ORDEN 3

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|A| = \underbrace{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31}}_{\text{TÉRMINOS POSITIVOS}} - \underbrace{\left[a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11}\right]}_{\text{TÉRMINOS NEGATIVOS}}$$

Prof. Ramón Arilla
Departamento de Investigación de Mercados
y Métodos Cuantitativos

PÁGINAS 97 y 98

CÁLCULO DE DETERMINANTES DE ORDEN 3

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (9+8+1) - [6+2+6] = (18) - (14) = 4$$

Prof. Ramón Arilla
Departamento de Investigación de Mercados
y Métodos Cuantitativos

EJERCICIOS EN CLASE

1. $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$

2. $|A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$

3. $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$

4. $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

5. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

6. $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Prof. Ramón Arilla
Departamento de Investigación de Mercados
y Métodos Cuantitativos

1ª PROPIEDAD

$$\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & d & g \\ c & f & i \\ b & e & h \end{vmatrix}$$

CAMBIA EL SIGNO

Prof. Ramón Arilla
Departamento de Investigación de Mercados
y Métodos Cuantitativos

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Ejemplo 2.6 Cambiar de lugar las filas 1ª y 2ª en el siguiente determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ 1 & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = -10$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ 1 & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ 1 & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = 10$$

Prof. Ramón Arilla
Departamento de Investigación de Mercados
y Métodos Cuantitativos

2ª PROPIEDAD

$$(k)\begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & d & g \\ kb & ke & kh \\ c & f & i \end{vmatrix}$$

Prof. Ramón Arilla
Departamento de Investigación de Mercados
y Métodos Cuantitativos

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

Ejemplo 2.8
Multiplicar la primera fila por (2) en el siguiente determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ 1 & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = -10$$

$$|A| = (2)\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ 1 & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ 1 & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = -20$$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

NOTA2.2

Ejemplo 2.9 Sacar los factores comunes que se puedan en el siguiente determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 24 & 27 \end{vmatrix} = -12$$

$$|A| = \begin{matrix} (2) \leftarrow \\ \\ (3) \leftarrow \end{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 24 & 27 \end{vmatrix} = 6 \begin{array}{c} \begin{matrix} \quad & (2) & \quad \\ \quad & \uparrow & \quad \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 8 & 9 \end{vmatrix} \end{array} = 12 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{vmatrix} = (12)(-1) = -12$$

3ª PROPIEDAD

$$(k)\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{d} & \mathbf{g} \\ \mathbf{b} & \mathbf{e} & \mathbf{h} \\ \mathbf{c} & \mathbf{f} & \mathbf{i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{d} & \mathbf{g} \\ ka+\mathbf{b} & kd+\mathbf{e} & kg+\mathbf{h} \\ \mathbf{c} & \mathbf{f} & \mathbf{i} \end{vmatrix}$$

Prof. Ramón Arilla
Departamento de Investigación de Mercados
y Métodos Cuantitativos

Ejemplo 2.10 Comprobar que haciendo el mayor número posible de ceros en la primera columna, el siguiente determinante no varía:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -10$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} (3)(-2) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -10$$

Prof. Ramón Arilla
Departamento de Investigación de Mercados
y Métodos Cuantitativos

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

4ª PROPIEDAD

$$|A| = |A^t|$$

Ejemplo 2.11 Comprobar que el determinante de la matriz A del ejemplo anterior no varía:

$$|A^t| = \left| \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & -3 \end{bmatrix}^t \right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -10$$

5ª PROPIEDAD

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & d & g \\ 0 & e & h \\ 0 & f & i \end{vmatrix} = 0$$

Prof. Ramón Arilla
Departamento de Investigación de Mercados
y Métodos Cuantitativos

6ª PROPIEDAD

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{d} & \mathbf{d} & \mathbf{g} \\ \mathbf{e} & \mathbf{e} & \mathbf{h} \\ \mathbf{f} & \mathbf{f} & \mathbf{i} \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo 2.12 Comprobar que el valor del siguiente determinante es nulo :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \end{vmatrix} = [(-3)+(-9)+(-3)]-[(-9)+(-3)+(-3)] = (-18)+(18) = 0$$

Prof. Ramón Arilla
Departamento de Investigación de Mercados
y Métodos Cuantitativos

7ª PROPIEDAD

$$|A| = \begin{vmatrix} kd & d & g \\ ke & e & h \\ kf & f & i \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo 2.13 Hallar el valor del siguiente determinante:

$$|A| = \begin{array}{c} (3) \\ \uparrow \end{array} \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

8ª PROPIEDAD

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{a+d} & \mathbf{l} & \mathbf{d} \\ \mathbf{b+e} & \mathbf{m} & \mathbf{e} \\ \mathbf{c+f} & \mathbf{n} & \mathbf{f} \end{vmatrix} \quad |A| = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{l} & \mathbf{d} \\ \mathbf{b} & \mathbf{m} & \mathbf{e} \\ \mathbf{c} & \mathbf{n} & \mathbf{f} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{d} & \mathbf{l} & \mathbf{d} \\ \mathbf{e} & \mathbf{m} & \mathbf{e} \\ \mathbf{f} & \mathbf{n} & \mathbf{f} \end{vmatrix}$$

Ejemplo 2.14 Comprobar la propiedad anterior con el siguiente determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 24 & 27 \end{vmatrix} = -12$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+1 & 8 & 10 \\ 2+1 & 2 & 4 \\ 0 & 24 & 27 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 10 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 24 & 27 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 8 & 10 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 24 & 27 \end{vmatrix} = 6 - 18 = -12$$

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

9ª PROPIEDAD

$$|A| = \begin{vmatrix} a+d & a & d \\ b+e & b & e \\ c+f & c & f \end{vmatrix} = 0$$

Ejemplo 2.15 Demostrar que el siguiente determinante es nulo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+d & 1 & d \\ 2+e & 2 & e \\ 3+f & 3 & f \end{vmatrix} = 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+d & 1 & d \\ 2+e & 2 & e \\ 3+f & 3 & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & d \\ 2 & 2 & e \\ 3 & 3 & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & 1 & d \\ e & 2 & e \\ f & 3 & f \end{vmatrix} = 0$$

Prof. Ramón Arilla
Departamento de Investigación de Mercados
y Métodos Cuantitativos

10ª PROPIEDAD

$$\left|[A][B]\right| = |A||B|$$

Ejemplo 2.16 Comprobar la propiedad anterior con las siguientes matrices:

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 24 & 27 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 24 & 27 \end{vmatrix} = -12 \qquad [B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -2$$

$$|A||B| = (-12)(-2) = 24$$

$$\left|[A][B]\right| = \left| \begin{bmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 24 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 40 & 16 & -28 \\ 17 & 12 & -19 \\ 105 & 30 & -57 \end{vmatrix} = 24$$

NOTA $\quad |A+B| \neq |A| + |B|$

NOTA2.6

Ejemplo 2.18 Sacar del siguiente determinante todos los Factores comunes por filas:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 10 & 2 \\ 8 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 72$$

$$|A| = \begin{array}{c} (2) \leftarrow \\ (2) \leftarrow \\ (2) \leftarrow \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 10 & 2 \\ 8 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 2^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2^3(9) = 72$$

Prof. Ramón Arilla
Departamento de Investigación de Mercados
y Métodos Cuantitativos

7. DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR LOS ELEMENTOS DE UNA FILA O COLUMNA

Ejemplo: Desarrollar el determinante por los elementos de la primera columna.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 Adj(a_1) - a_2 Adj(a_2) + a_3 Adj(a_3) - a_4 Adj(a_4)$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & b_2 \\ b_3 & c_3 & b_3 \\ b_4 & c_4 & b_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Prof. Ramón Arilla
Departamento de Investigación de Mercados
y Métodos Cuantitativos

DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR LOS ELEMENTOS DE UNA FILA O COLUMNA

Ejemplo 2.20 Calcular el siguiente determinante desarrollándolo por los elementos de su tercera columna:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (1)\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} - (0)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} + (2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -12 + 2(13) - 25 = -11$$

Prof. Ramón Arilla
Departamento de Investigación de Mercados
y Métodos Cuantitativos

DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR LOS ELEMENTOS DE UNA FILA O COLUMNA

Ejemplo 2.21 Calcular el siguiente determinante desarrollándolo por los elementos de su segunda fila:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$|A| = -(3)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (0)\cancel{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} - (2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(3)(-3) - (2)(3) = 3$$

Prof. Ramón Arilla
Departamento de Investigación de Mercados
y Métodos Cuantitativos

DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR LOS ELEMENTOS DE UNA FILA O COLUMNA

Calcular el siguiente determinante desarrollándolo por los elementos de su tercera columna:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$|A| = (1)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (2)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (1)(9) - (2)(3) = 3$$

Prof. Ramón Arilla
Departamento de Investigación de Mercados
y Métodos Cuantitativos

DESARROLLO DE UN DETERMINANTE POR LOS ELEMENTOS DE UNA FILA O COLUMNA

Calcular el siguiente determinante desarrollándolo por los elementos de su segunda columna:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$|A| = -(0)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(3)(-1) = 3$$

Prof. Ramón Arilla
Departamento de Investigación de Mercados
y Métodos Cuantitativos

Ejemplo 2.22 Calcular el siguiente determinante por el método general.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (-1)(-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \\ -3 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (+1)\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

MÉTODO GENERAL PARA LA RESOLUCIÓN DE DETERMINANTES

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix} (-2) = \begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -11$$

Prof. Ramón Arilla
Departamento de Investigación de Mercados
y Métodos Cuantitativos

Ejemplo 2.22 Calcular el siguiente determinante por los elementos de la primera fila.

(-3)

(-1)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & -11 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = (+)\begin{vmatrix} 3 & -3 & -11 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (-3)(3) = \begin{vmatrix} 3 & -3 & -11 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 0 & -8 \\ 2 & 1 & 1 \\ -7 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = -11$$

Páginas 112 y113

Tema 1: INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

1.2 Determinantes

EJERCICIOS EN CLASE

Calcular los siguientes determinantes:

1. $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

2. $$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

4. $$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Prof. Ramón Arilla
Departamento de Investigación de Mercados
y Métodos Cuantitativos

EJERCICIOS EN CASA

Página 125.
Del 1 y 2

Página 144
Del 1, 2, 3, 4